

## Abordagem categorial para a linguagem da teoria quântica

Eleonoura Enoque da Silva<sup>1</sup>

**Resumo:** O propósito do nosso trabalho é investigar a construção da “categoria dos espaços Hilbert”, com o objetivo de superar certos limites contidos nas linguagens da teoria quântica. A importância de se estudar a teoria quântica por uma via categorial é a possibilidade da construção de uma categoria que já incorpora na sua própria linguagem alguns dos axiomas, fenômenos e princípios básicos da mecânica quântica.

**Palavras chaves:** Linguagem, teoria das categorias, teoria quântica.

**Abstract:** The purpose of our work is to investigate the construction of the "category of Hilbert spaces", in order to overcome certain limitations contained in the language of quantum theory. The importance of studying the quantum theory by a categorial approach is the possibility of building a category that already incorporates in its own language some of the axioms, phenomena and basic principles of quantum mechanics.

**Keywords:** Language, category theory, quantum theory.

### INTRODUÇÃO

Mecânica quântica, ao longo de sua história, sempre suscitou muitas pesquisas, especulações e controvérsias. É uma ciência intrigante, na medida em que a exuberância dos vários fenômenos possui uma base minimalista: o universo amplo e diferencial dos

---

<sup>1</sup>Professora do Curso de Filosofia da UNICAP/PE, e-mail: [eleonouras@yahoo.com.br](mailto:eleonouras@yahoo.com.br). O presente trabalho refere-se a uma parte de um capítulo da minha tese de Doutorado junto a UFPB.

fenômenos descritos deixa-se apreender a partir de uma formulação em poucas proposições.

A principal dificuldade que encontramos na Mecânica Quântica (MQ) consiste em conciliar, em termos de interpretação, ideias antagônicas, como os conceitos de onda e partícula. Não há, no mundo clássico, analogias que permitam fundir o comportamento ora ondulatório, ora corpuscular da luz. Como resultado, a MQ é interpretada de diferentes maneiras e, para cada corrente ou escola de pensamento, o resultado de um experimento apresenta diferentes epistemologias.

Se, a princípio, podemos dizer que o arcabouço teórico da física quântica é distinto da física clássica, então é impossível não admitir que a mecânica quântica também a contém dentro de si. Além do mais, sempre foi uma fonte rica de argumentos heurísticos para a construção de teorias matemáticas e discussões filosóficas. Hoje, a mecânica quântica é o alicerce sobre o qual nos apoiamos para compreender o complexo universo físico.

Por esse motivo, precisávamos eleger como objeto de estudo um instrumento o mais claro e evidente possível para descrever as questões suscitadas pela mecânica quântica, uma vez que os teoremas matemáticos em geral impedem-nos de analisar clara e detidamente o seu conteúdo. Este instrumento é a teoria das categorias.

## ASPECTOS GERAIS DA TEORIA DAS CATEGORIAS

A teoria das categorias, além de ser um ramo da matemática pura, é sem sombra dúvida, um ambiente adequado para tratar formalmente das relações existentes entre diferentes estruturas matemáticas. Por isso, em teoria das categorias, conseguimos fazer aplicações importantes na teoria da computação e na física teórica, como abordaremos na próxima seção.

Na física, sabemos que a maioria das pessoas tem dificuldades em compreender as partículas subatômicas, não só porque a matemática é complexa, mas porque não conseguimos entender o que a matemática parece estar nos dizendo. Ainda há desacordos entre os físicos sobre se a função de onda, o objeto matemático que determina a probabilidade de diferentes resultados de medições, descreve todas as informações do sistema físico e se as observações feitas pelo experimentador são completas.

A descrição dos fenômenos quânticos envolve problemas de natureza física e filosófica, mas, sobretudo, questões concernentes ao formalismo matemático, necessário para a elaboração da semântica da teoria quântica. Ora, já que as principais dificuldades encontram-se no campo da matemática, pensamos ser justamente através dela que podemos encontrar alternativas, como a teoria das categorias, para elaborar uma linguagem mais compatível com a extrema

complexidade inerente aos fenômenos quânticos.

Isso significa que podemos, com o auxílio da teoria das categorias, descrever as relações entre os diferentes e complicados, processos quânticos num nível adequado de abstração útil, especialmente, quando desejamos representar algumas das características estranhas da teoria quântica, como emaranhamento, não localidade, etc.

Uma grande parte dos postulados, princípios, axiomas e fenômenos da MQ podem ser formulados em categorias compactas adagas. A categoria dos espaços de Hilbert de dimensão finita é um exemplo padrão de uma categoria compacta adaga. Essas reformulações e aplicações foram apresentadas em nossa tese de doutorado.

## **A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DE CATEGORIAS NA MQ**

O físico-matemático da Universidade de Oxford Bob Coecke trabalha com uma linguagem gráfica para descrever processos da mecânica quântica. Este trabalho é baseado na teoria das categorias.

Para entender a vantagem de se trabalhar com teoria das categorias na MQ, Coecke refere-se a um exemplo comum encontrado por programadores de computador:

Se alguém lhe deu um programa de computador escrito em zeros e uns, não há nenhuma maneira que você possa ver

o que ele faz. Mas se, ao contrário, alguém lhe der um quadro com o fluxograma que representa o algoritmo que você está esperando para recriar, você iria entender imediatamente o que o programa faz. Para nós, estes diagramas são uma linguagem de alto nível para raciocinar sobre a física. (Coecke, 2006)

Pelo que foi dito, percebemos que a linguagem em categorias permite visualizar rapidamente fatos bastante complicados, por meio de diagramas. Surpreendentemente, os esquemas diagramas de Coecke podem ser usados para analisar as palavras e os significados das sentenças, com o fito de entendermos o que a linguagem faz.

É interessante notar que a forma como as palavras interagem para tornar-se uma frase é semelhante à maneira como os processos quânticos interagem. Por exemplo, o site “GOOGLE” não toma conhecimento da ordem de palavras em uma página, mas, na verdade, a ordem pode mudar completamente o significado de uma frase. Coecke usou sua abordagem gráfica para conectar palavras individuais numa frase, e assim o seu significado pode ser extraído de acordo com o conteúdo de cada palavra e seu posicionamento. Este é um grande feito: a maioria dos modelos da linguagem humana, quer se concentram em palavras individuais ou regras gramaticais, mas não em ambos. “Nosso modelo categórico afugenta os modelos de processamento de linguagem existentes”, diz Coecke.

A teoria das categorias fornece uma linguagem para

descrever precisamente alguns fenômenos que ocorrem em diferentes campos da matemática e física. Por exemplo, cada espaço vetorial de dimensão finita é isomorfo ao seu dual e, portanto, também ao seu segundo dual. A segunda correspondência é considerada “natural”, mas a primeira não é. A teoria das categorias permite fazer precisamente a distinção através da noção de isomorfismo natural. Ela fornece recursos que permitem transportar os problemas de uma área da matemática (via funtores adequados) para outra, onde as soluções são, por vezes, mais simples. Por exemplo, a topologia algébrica pode ser descrita como uma investigação de problemas topológicos (via funtores adequados) por métodos algébricos.

Alguns físicos estão otimistas de que essas representações alternativas também possam ajudar a tirar novas conclusões sobre a gravidade quântica e a natureza do tempo. O físico-matemático John Baez, do Centro de Tecnologia Quântica de Singapura, reescreveu (ou antes, redesenhou) a física quântica, usando teoria das categorias. Segundo Baez, “a Teoria das Categorias remonta algumas ideias muito básicas dos sistemas que os matemáticos conhecem bem, mas que físicos raramente exploram.”(Baez, 2004, p.67)

Especificamente, a teoria das categorias substitui equações por isomorfismos. Por exemplo, se você tem sete objetos em uma categoria e sete em outra, você pode combinar cada objeto da primeira com um parceiro na segunda categoria e, em seguida,

concluir que as coleções são isomorfas entre si. Os dois objetos em cada par não são o mesmo objeto, mas são “os mesmos”, de alguma forma matemática específica, e o isomorfismo explicitamente detalha de que maneira. Segundo Baez, “uma das principais maneiras de mostrar a natureza dos isomorfismos é quando você está pensando sobre o tempo, sobre como as coisas mudam, mas também como as coisas permanecem a mesma.”(Baez, 2004.,p.67)

O que fizemos ao longo deste trabalho foi mostrar que os conceitos básicos da teoria quântica envolvem um formalismo matemático e propriedades matemáticas que os representam. Essas propriedades são utilizadas para expressar um problema físico em termos matemáticos. Uma vez que a versão matemática do problema é formulada, ele pode ser resolvido por meio de técnicas puramente matemáticas que não precisam ter qualquer interpretação física. A solução formal é, então, traduzida de volta para o mundo físico por meio das propriedades.

Em nossa tese provamos que os objetos da categoria de Hilbert são os mesmos. Isto significa que, neste tipo de categoria, podemos tomar coleções de indistinguíveis e tratar os estados quânticos emaranhados na linguagem categorial.

O fato dos objetos estarem dentro de uma categoria, de certa forma, elimina o problema da indistinguibilidade. Além disso, por estes serem sempre caracterizados por isomorfismos, esta é uma condição que nos permite capturar a ideia de equivalência entre

diferentes representações de uma mesma estrutura abstrata.

Portanto, ao estudar a teoria quântica por uma via categorial, e não pela teoria de quase conjunto, nos é dada a possibilidade da construção de uma categoria que já incorpora, na sua própria linguagem, alguns dos princípios básicos da MQ.

A respeito disso, Saunders Mac\_Lane afirma que devemos atribuir à teoria das categorias um papel organizacional, a saber: esta teoria explicita de forma evidente os elementos estruturais da mecânica quântica, ao contrário dos teoremas matemáticos, que jamais conseguiram exprimir com a devida clareza os fundamentos quânticos. (Mac Lane, 1997, p.117-122)

Nesse mesmo sentido, Elaine Landry afirma que, quando trabalhamos com categorias, não podemos imaginar que o conteúdo ou constituintes da teoria ou estrutura matemática se esgotem nas categorias; o papel da teoria das categorias consiste apenas em organizar o que foi dito sobre o conteúdo e conceitos das teorias matemáticas. (Landry, 1999, p.14-27)

O formalismo da mecânica quântica é muito mais abstrato e menos intuitivo do que a mecânica clássica. O mundo não parece ser constituído por operadores hermitianos e vetores de estado, e por isso nós devemos dar uma atenção especial a este dado, e, com a utilização das linguagens matemáticas, tornar o estruturalismo quântico o mais claro e evidente possível.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso interesse pela teoria das categorias surgiu da leitura do trabalho de Queiroz (2009), no qual ele afirma que a noção de identidade deve ser pensada no contexto da teoria das categorias, porque o conceito-chave para a identidade de objetos em categorias é o conceito de isomorfismo. A partir disso, vislumbramos a possibilidade de examinar, por meio dessa teoria, os fundamentos conceituais da mecânica quântica.

No decorrer da nossa pesquisa, descobrimos que os pesquisadores em ciência da computação não só usavam muito a teoria das categorias como também haviam construído um tipo de categoria monoide, chamada categoria de Hilbert, que é aplicada à prática dos físicos. Além disso, constatamos que esses pesquisadores, há alguns anos, vinham fazendo aplicações dessas estruturas de categorias para desenvolvimento de novas tecnologias, como criptografia quântica, teletransporte de fótons emaranhados e computação quântica.

O propósito de minha investigação não consiste na revelação de nenhum fato ou estrutura nova, já que não temos como rever e, portanto, reestruturar os fundamentos conceituais da teoria quântica, uma vez que a complexidade do tema demandaria praticamente um novo trabalho; porém, esta razão não se constitui em um empecilho para interpretá-los sob a perspectiva de uma estrutura categorial,

organizada de tal forma que possamos tratar de modo adequado e claro os princípios básicos da mecânica quântica; este é o meu propósito neste trabalho: uma tarefa hermenêutica se manifesta.

No entanto, neste trabalho, vimos outra maneira de apresentar a linguagem da teoria quântica por uma via categorial, e não pela teoria de quase conjunto; a importância desta escolha reside na possibilidade da construção de uma categoria que já incorpora na sua própria linguagem alguns dos princípios básicos da MQ, tais como emaranhamento e superposição.

Em consonância com as ideias de Mac Lane (1992) e Landry (1999), vimos, no capítulo final, que as lacunas da matemática e da física puderam ser preenchidas e sistematizadas através do uso, levado a cabo pelos pesquisadores de ciência da computação, da categoria de Hilbert, na qual mostramos duas facetas da natureza dos objetos físicos. Em primeiro lugar, esses objetos estão sempre dentro de uma categoria, o que, de certa forma, eliminaria o problema da indistinguibilidade. Em segundo lugar, os objetos são sempre caracterizados por isomorfismos, o que permite capturar a ideia de equivalência entre diferentes representações de uma mesma estrutura abstrata.

A especificidade deste trabalho reside principalmente na tentativa de síntese destas três teorias (quase conjuntos, lógica quântica e das categorias), com o objetivo de investigar, segundo a abordagem irreduzível a cada uma destas, a linguagem da teoria

quântica.

Pretendemos, em futuras pesquisas, ampliar a discussão dos objetos quânticos em teoria das categorias e construir uma semântica para a categoria de Hilbert.

### **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

BAEZ, John C. A Category-Theoretic Perspective. math.CT, Feb 2004.

COECKE, B. Strongly Compact Closed Semantics. Theoretical Computer Science. Elsevier B.V. Electronic, 2006.

COECKE, B. Introducing categories to the practicing physicist. quant-ph, p. 29, Aug 2008.

LANDRY, Elaine. Category Theory: The Language of Mathematics. Philosophy of Science, 66. (Proceedings), 1999, 14-27.

QUEIROZ, G. S. *Sobre a identidade dos objetos matemáticos*. in Bauchwitz, O. F. *Metafísica, Ontologia e História*. Natal: Edufrn, 2009, 355-387

MAC LANE, S. The Protean Character of Mathematics, in J. Echeverra, A. Ibarra and J. Mormann (eds.), *The Space of Mathematics*. New York: Gruyter, 1992, p. 3-12.

MAC LANE, S. *Categories for the Working Mathematician*. New York: Springer-Verlag, 1997.

MAC LANE, S. *Categorical Foundations of the Protean Character of Mathematics*, in Echeverra Agazzi and G. Darvas (eds.), *Philosophy of Mathematics Today*, Kluwer Academic Publishers, 1997, p.117-122.

SILVA, Eleonora Enoque. Fundamentos da Mecânica Quântica em Teoria das categorias. Tese (Doutorado) em Filosofia, Universidade Federal da Paraíba, Orientador Giovanni Queiroz, 2015, 123p. (a ser publicada)